1. Il concetto di impedenza

Per fortuna l'uso della nostra lingua neolatina ci consente di cogliere l'etimologia anche di molti termini scientifici: impedenza suggerisce un'entità che impedisce, si oppone, pone ostacolo ad un fenomeno. Tanto è vero che il reciproco dell'impedenza, cioè l'entità il cui valore è 1/impedenza, è chiamato *ammettenza*, quindi è un'entità che consente e favorisce un fenomeno.

L'impedenza è in generale simboleggiata con la lettera Z mentre l'ammettenza con Y=1/Z.

La fisica rischia di perdere immediatezza quando si inizia a distinguere tra impedenza elettrica, impedenza meccanica, impedenza acustica, protagoniste della sorprendente analogia.

Da dove viene l'analogia?
Dalla matematica delle leggi fisiche!
Essenzialmente le equazioni matematiche fondamentali che regolano fenomeni diversi, come quelli elettrici e meccanici, acustici e idraulici, hanno la stessa forma, quindi le stesse soluzioni.
Si instaura quindi un **dualismo** per cui un problema meccanico può essere simulato o risolto tramite lo studio del suo duale elettrico, e viceversa.

Il più immediato esempio d'impedenza, noto all'uomo fin dall'antichità, è quello dell'attrito meccanico, che si manifesta come una forza contraria alla forza agente F e proporzionale alla velocità v. Quindi quando

[1.1] $\vec{F} = R_M \vec{v}$

il sistema si trova in equilibrio e la velocità v risulta costante.

Viceversa, applicata una forza costante F ad un corpo con attrito R_M, questo raggiungerà una velocità v costante

[1.2] $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{F}}{R_M}$.

E questo comportamento cosa ha di diverso dalle leggi di Ohm?

[1.3] V= $R_E i$

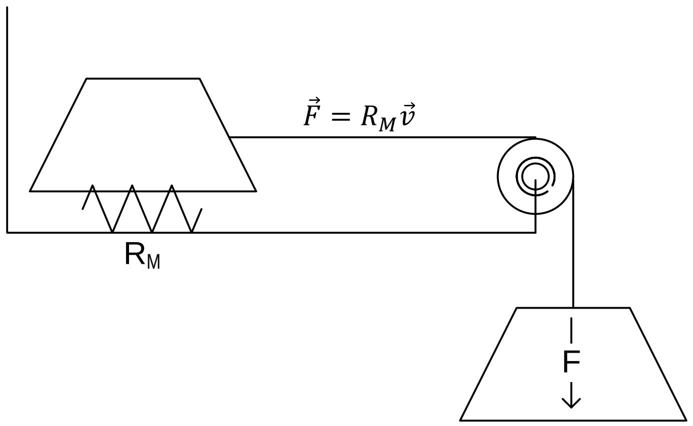
[1.4] $i = \frac{V}{R_E}$

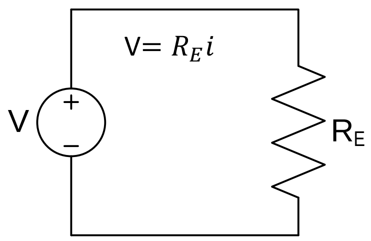
Nulla!
In entrambi i casi le R rappresentano una "resistenza".
Nel caso meccanico all'incremento della velocità v, a parità di forza F applicata:

[1.5] $R_M = \frac{F}{v}$

nel caso elettrico all'incremento della corrente i che scorre nel circuito, a parità di tensione V:

[1.6] $R_E = \frac{V}{i}$





Non solo siamo in grado d'individuare la **dualità** tra velocità di spostamento v e corrente elettrica i, tra forza applicata F e tensione V, ma possiamo applicare anche le leggi di Watt, dato che sia il prodotto V·i che quello F·v hanno le dimensioni di una potenza P (cioè dell'energia trasformata in ogni unità di tempo).
Si deduce che

[1.7] $P_E = i^2 R_E = \frac{V^2}{R_E}$

come anche

[1.8] $P_M = v^2 R_M = \frac{F^2}{R_M}$

ma se nel caso elettrico misuriamo R_E in ohm, quale sarà l'unità di misura dell'attrito nel Sistema Internazionale?
Beh, la legge di Newton c'insegna che la forza F è pari al prodotto tra massa meccanica M_M e accelerazione a

[1.9] $\vec{F} = M_M \vec{a}$

Quindi le dimensioni della forza, che non a caso si misura in newton [N], sono anche [kg·m/s^2].
Di conseguenza le dimensioni dell'attrito R_M sono [N/(m/s)]=[kg/s].

Accidenti! Abbiamo già individuato una delle grandezze caratteristiche di un normale altoparlante: la **resistenza meccanica**, data dagli attriti interni dei materiali (più componenti aerodinamiche) che impareremo essere la ragione dello smorzamento meccanico e del relativo fattore di merito Q_{MS}.

Fino ad ora abbiamo considerato situazioni fisiche stazionarie, con agenti costanti e conseguenze costanti, a regime.
La natura diviene più complicata se intendiamo invece individuare le leggi dinamiche, se vogliamo descrivere il comportamento in relazione al tempo e a un cambiamento delle sollecitazioni agenti o, addirittura, se le sollecitazioni agenti sono periodiche, cioè caratterizzate da andamenti sinusoidali.

La funzione *sin(x)* riporta ovviamente alla trigonometria, che è tra le parti meno amate della matematica studiata alle superiori. Eppure la sua importanza è fondamentale per 3 motivi:

1. Ogni funzione matematica *f(t)* che descriva un andamento di una grandezza nel tempo, può essere **trasformata** in una funzione matematica della frequenza. Le funzioni matematiche periodiche, con periodo T e frequenza f=1/T, sono un caso particolare, in cui la cosiddetta *trasformata di Fourier* diviene una serie, cioè una sequenza, di funzioni sinusoidali con frequenze multiple intere di f.
2. Ci sono proprietà matematiche, studiate però solo a livello universitario, che legano le funzioni **sinusoidali** a particolari funzioni **esponenziali** e^x: quelle con esponente "immaginario". Di fatto la stessa trasformata di Fourier, del punto precedente, è basata su tali proprietà, Ma non possiamo approfondire oltre perché non è un caso se la matematica a cui fanno capo queste proprietà è definita "complessa".
3. I 2 motivi precedenti assumono un ruolo fondamentale in quanto le funzioni sinusoidali e quelle esponenziali forniscono soluzioni alle cosiddette *equazioni differenziali*, cioè equazioni in cui alcune funzioni sono presenti contemporaneamente assieme alle relative funzioni derivate e/o integrali. E anche i concetti di **derivata** e **integrale** appartengono alla matematica superiore, i cui fondamenti sono appena trattati nell'ultimo anno del solo liceo scientifico e spesso neanche accennati negli altri indirizzi di studio.

Cerchiamo di focalizzare le informazioni minime: la derivata è un operatore su una funzione f(x), che individua una nuova funzione f'(x) che a sua volta esprime l'intensità della **variazione** del valore risultato della funzione f di partenza, in relazione al variare della variabile di tale funzione (ai più pratici, ricordiamo che una funzione può avere anche più variabili).
Complicato? Beh, per i nostri scopi pensiamo a valori che variano rispetto al tempo. Ad esempio la

posizione di 1 punto materiale che possa muoversi lungo una retta.
Bene: chiamiamo x(t) la funzione che descrive la posizione di quel punto al variare del tempo.
La derivata esprime, in ogni momento, quanto varia la posizione x rispetto alla variazione di tempo.
L'operazione in pratica considera 2 istanti di tempo distanti l'intervallo Δt e a cui corrisponderà una variazione di posizione Δx. Se studiamo tali variazioni per Δt che diventa sempre più piccolo, cioè come dicono i matematici ne valutiamo il **limite** per Δt che tende a zero, otteniamo la variazione istantanea della posizione.
Per un corpo in movimento, la variazione di spazio percorso rispetto all'unità di tempo indica la velocità istantanea v(t) ed è proprio fornita dalla derivata della posizione x(t) rispetto al tempo t, operazione matematica espressa con le seguenti notazioni:

[1.10] $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = v(t)$$

In maniera del tutto analoga la derivata (prima) della velocità v(t), detta anche derivata seconda dello spostamento x(t), fornisce l'accelerazione istantanea a(t), espressa con le notazioni:

[1.11] $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t) = a(t)$$

Per completezza, ricordo come l'integrale sia l'**operatore inverso** della derivata. Quindi la velocità è l'integrale dell'accelerazione, rispetto al tempo, e lo spazio percorso è l'integrale della velocità.

È purtroppo giunto il momento di dire che le funzioni sinusoidali che forniscono le soluzioni delle equazioni che descrivono il comportamento dei sistemi, non sono solo funzione della frequenza ma sono caratterizzate da ulteriori 2 grandezze: l'**ampiezza** A, che è un fattore moltiplicativo della funzione sin(x), che di per sé ha sempre valori compresi tra -1 e 1, e la **fase** φ in grado di spostare il punto in cui il valore della funzione sinusoidale vale zero.

Ecco che l'espressione più abituale per una funzione sinusoidale di ampiezza A e frequenza f è A·sin(2πft+φ), in cui, per comodità, il prodotto 2πf è espresso con la lettera ω, quindi diviene A·sin(ωt+φ). Tale forma prende il nome di **fasore** e rappresenta un po' il punto di contatto tra il "dominio del tempo" e il "dominio della frequenza".

Mal di testa?
Pensate quanti ne hanno avuti i matematici che hanno concepito per primi questi concetti! Gente del calibro di Eulero e Leibnitz. E garantisco che, almeno per il momento, sto evitando di aggravare la situazione, risparmiandoci l'introduzione di altri concetti collegati, quali le proprietà semplificatorie delle trasformate di Laplace e di Fourier rispetto alle operazioni di derivazione.

Di queste proprietà ci tornerà utile sapere che, nella trasformazione dal dominio del tempo al dominio della frequenza, l'operazione di derivazione corrisponde a **moltiplicare per jω** mentre l'integrazione corrisponde a **dividere per jω** in cui *j* è l'unità immaginaria pari a $\sqrt{-1}$.
Si chiama unità immaginaria perché di immaginazione ne occorre parecchia per trovare il numero che, elevato al quadrato, è uguale a -1. Ignoriamo, per ora, altre implicazioni di aritmetica complessa, cioè legata all'unità immaginaria *j*.

I concetti di derivata e integrale sono coinvolti ogni volta ci siano grandezze che variano nel tempo t. Ad esempio la potenza (istantanea) P(t), espressa in watt, è la derivata del "lavoro" rispetto al tempo, espresso in joule. Il lavoro, per il principio termodinamico di conservazione dell'energia, corrisponde a una trasformazione di energia.

Per quanto detto sulla trasformazione delle funzioni tramite espressioni di componenti sinusoidali, quando la potenza istantanea è data dal prodotto di 2 funzioni sinusoidali, come nei casi $P_e(t)=V(t)\cdot i(t)$ o $P_m(t)=F(t)\cdot v(t)$, la sostituzione dei fattori dei prodotti coi rispettivi fasori:

$V_{max}\sin(\omega t+\varphi_v)$, $i_{max}\sin(\omega t+\varphi_i)$, $F_{max}\sin(\omega t+\varphi_F)$, $v_{max}\sin(\omega t+\varphi_v)$, e l'applicazione delle formule trigonometriche di Werner, porta alle seguenti espressioni per la potenza istantanea:

[1.12] $P_e(t) = \frac{1}{2}[V_{max}i_{max}\cos\phi - V_{max}i_{max}\cos(2\omega t + \phi)]$
come anche
[1.13] $P_m(t) = \frac{1}{2}[F_{max}v_{max}\cos\phi - F_{max}v_{max}\cos(2\omega t + \phi)]$

in cui ϕ è lo **sfasamento**, cioè la differenza tra le fasi dei fasori che rappresentano i 2 fattori.

Per ora, siamo riusciti ad arrivarci senza scomodare i numeri immaginari. Ma è stata una sudata!

Nelle 2 espressioni 1.12. e 1.13 possiamo identificare una componente indipendente dal tempo ma proporzionale a $\cos\phi$, e una componente sinusoidale, con frequenza doppia.

La componente indipendente dal tempo è la cosiddetta **potenza costante**. Corrisponde alla **potenza attiva** o reale, quella che compie un lavoro o che si trasforma in calore, e il termine $\cos\phi$ viene detto **fattore di potenza**.

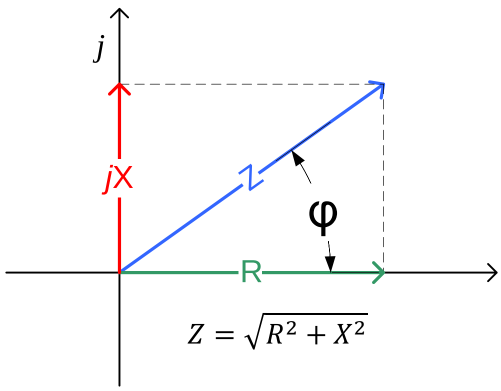
La componente periodica invece si aggiunge e toglie continuamente ma la media nel tempo è nulla. È la **potenza fluttuante**. Nella rappresentazione coi numeri complessi corrisponde alla parte **immaginaria** o **reattiva** della potenza,

E qui la cosa diviene interessante per i nostri scopi perché dobbiamo generalizzare la 1.7 e 1.8 al caso in cui l'impedenza Z non sia reale ma sia anche lei complessa, espressa genericamente da

[1.14] $Z = R + jX$

In cui R è la già nota resistenza mentre X prende il nome di **reattanza**.

La 1.14 viene rappresentata molto efficacemente tramite vettori, le cui componenti sugli assi cartesiani sono pari alla parte reale R e alla parte immaginaria X. In coordinate polari, il vettore-impedenza è espresso dalla coppia (Z, φ) in cui Z è il **modulo dell'impedenza** e φ è l'argomento dell'impedenza, solitamente detto **fase dell'impedenza**, data dall'angolo tra il vettore e l'asse reale. Sono dei termini che usiamo con tale disinvoltura che, probabilmente, a molti sfugge che



[1.15] $R = Z\cos\varphi$ e $X = Z\sin\varphi$

nonché -semplicemente applicando il teorema di pitagora- che

[1.16] $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$.

Dopo un lungo giro, indispensabile ad acquisire strumenti teorici e operativi, siamo tornati al discorso di partenza sull'impedenza.

Dalle 1.7, 1.8, 1.12, 1.13 e 1.14, possiamo ora scrivere:

[1.17] $P_E = i^2 Z_E = \frac{V^2}{Z_E}$
come anche
[1.18] $P_M = v^2 Z_M = \frac{F^2}{Z_M}$

Nel caso sia X=0, è cioè l'impedenza sia puramente resistiva, è piuttosto immediata la similitudine tra resistenza elettrica e attriti, rappresentati dalla resistenza meccanica: in entrambi i casi non c'è sfasamento tra causa ed effetto, quindi $\cos\phi = 1$ e abbiamo pura dissipazione di energia, trasformata in calore.

Per il concetto di reattanza è invece l'approccio meccanico ad aiutarci nel comprendere la dualità col modello elettrico.

Riprendendo l'equazione di Newton 1.9 e la 1.11, che indica l'accelerazione come derivata della velocità, abbiamo

[1.19] $F(t) = M_M \frac{dv}{dt}$ da cui, trasformando, $F(\mathrm{j}\omega) = j\omega M_M \cdot v(j\omega)$

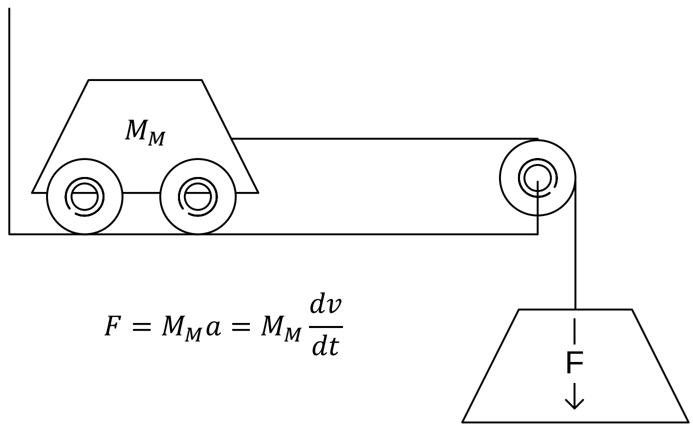
Che esprime il principio d'inerzia: a parità di effetto, dato dalla velocità acquisita dal corpo, occorre una forza tanto più grande quanto maggiore è la massa M_M.

Ma l'elettrotecnica c'insegna anche che in un induttore di capacità L

[1.20] $V(t) = L\frac{di}{dt}$ da cui, trasformando, $V(\mathrm{j}\omega) = j\omega L \cdot i(j\omega)$

a parità di effetto, dato dalla corrente che lo attraversa, occorre applicare una tensione tanto più grande quanto maggiore è l'induzione L.

Il confronto tra 1.19 e 1.20 con le corrispondenti 1.1 e 1.3 ci consente di comprendere come il prodotto $j\omega M_M$ abbia le dimensioni di una resistenza meccanica mentre il prodotto $j\omega L$ ha le dimensioni di una resistenza elettrica.
Questi prodotti sono quindi delle impedenze o, meglio, delle reattanze, per quanto espresso dalla 1.14.
Ecco quindi individuata una dualità tra massa meccanica M_M e induttanza elettrica L: entrambe rappresentano un'inerzia che si oppone alle variazioni, la massa di velocità, l'induttanza di corrente.



Se invece andiamo a scrivere la legge della dinamica per una molla di cedevolezza C_M, troveremo che a parità di deformazione s la forza F applicata la sarà inversamente proporzionale alla cedevolezza (o direttamente proporzionale alla rigidità, pari alla costante elastica della molla).

[1.21] $F(t) = \frac{1}{C_M}\, s(t)$

da cui, trasformando ed esprimendo la deformazione nello spazio come integrale della velocità

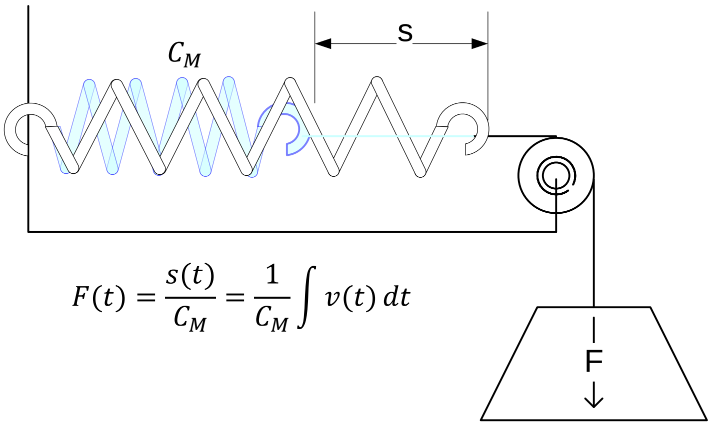
[1.22] $F(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_M}\, v(\mathrm{j}\omega)$

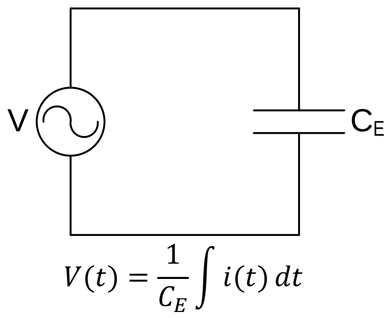
Dall'elettrotecnica sappiamo che per la capacità C_E del condensatore vale la legge

[1.23] $i(t) = C_E \frac{dV}{dt}$ da cui, trasformando ed integrando la tensione V,

[1.24] $V(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_E}\, i(\mathrm{j}\omega)$

Il confronto tra 1.22 e 1.24 con le corrispondenti 1.1 e 1.3 ci consente di comprendere come il prodotto $\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_M}$ abbia le dimensioni di una resistenza meccanica mentre il prodotto $\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_E}$ ha le dimensioni di una resistenza elettrica.
Anche questi termini sono quindi delle impedenze.
Ecco quindi individuata una nuova **dualità meccano-elettrica**, tra cedevolezza meccanica C_M e capacità C_E: entrambe rappresentano il reciproco di un'inerzia, quindi agevolano le variazioni, la cedevolezza di velocità, la capacità di corrente.



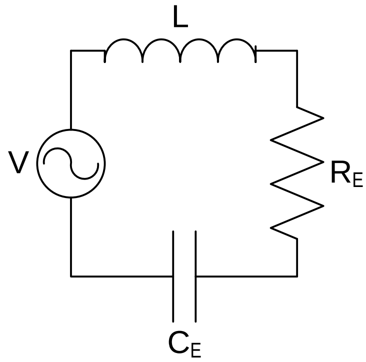


Abbiamo trovato che se il comportamento dell'induttore è assimilabile a quello della massa, l'inerzia, che ostacola la forza e ne ritarda gli effetti, accumulando energia (cinetica o potenziale) che viene quindi restituita, quello del condensatore è assimilabile alla cedevolezza di una molla: la forza è in grado di caricarla (come la corrente carica un condensatore) e, quando la forza cessa, la molla restituisce l'energia accumulata nella sua deformazione (e il condensatore quella accumulata nella sua carica).

In entrambi i casi non si ha dissipazione di energia in calore (se non attraverso la presenza parassita delle componenti resistive). Cioè le potenze coinvolte sono tutte fluttuanti, perché puramente reattive.

Quest'ultima affermazione trova dimostrazione nel fatto che, mentre le resistenze rappresentano impedenze reali, con **causa ed effetto "in fase"**, le impedenze fornite dall'inerzia e dalla cedevolezza (dall'induttanza e dalla capacità, nel duale elettrico) sono puramente immaginarie, e **sfasano l'effetto di 90° rispetto alla causa**, di conseguenza il fattore di potenza $\cos\phi$ è pari a zero.

Richiamando la 1.14, forma generale dell'impedenza complessa, applicandola alla corrente elettrica che circola in una maglia che contenga una resistenza RE, un induttore L e una capacità CE, collegate in serie, l'impedenza elettrica complessiva Z_E vista dal generatore sarà pari alla somma delle impedenze della componente resistiva (reale), induttiva e capacitiva (immaginarie):

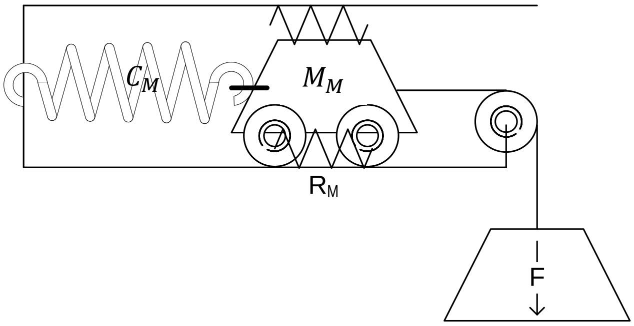


[1.25] $Z_E = R_E + j\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_E}$

Parallelamente, se scriviamo l'equazione meccanica del moto di una massa M_M collegata ad una molla con cedevolezza C_M e che si muova con degli attriti R_M:

[1.26] $F = R_M v + j\omega M_M v + \frac{1}{j\omega C_M} v = \left(R_M + j\omega M_M + \frac{1}{j\omega C_M}\right) v$

Dalla generalizzazione della 1.5 otteniamo l'impedenza meccanica Z_M:



[1.27] $Z_M = R_M + j\omega M_M + \frac{1}{j\omega C_M}$

Assolutamente analoga alla 1.25.

Per le componenti immaginarie, o reattanze X, abbiamo rispettivamente:

[1.28] $X_E = \omega L - \frac{1}{\omega C_E}$ e $X_M = \omega M_M - \frac{1}{\omega C_M}$

In cui il segno meno proviene dall'aver moltiplicato per *j* numeratore e denominatore del 2° termine e dal fatto "complesso" che j^2=-1.

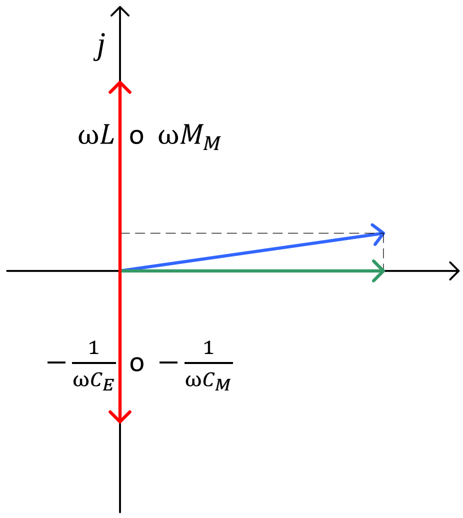
In entrambe abbiamo che, per certi valori, le reattanze si annullano. Esattamente quando:

[1.29] $\omega L = \frac{1}{\omega C_E}$ e $\omega M_M = \frac{1}{\omega C_M}$

Da cui, essendo $\omega = 2\pi f$

[1.30] $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC_E}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{M_M C_M}}$

La frequenza f è la **frequenza di risonanza** dei sistemi in oggetto. Infatti, se le resistenze (reali) sono nulle, dato che la potenza reattiva non è dissipata ed è fluttuante, le grandezze elettriche o meccaniche variano nel sistema con legge sinusoidale e frequenza f e i 2 sistemi realizzano degli oscillatori, elettrico o meccanico.



Rappresentando l'impedenza complessa tramite vettori, possiamo osservare come alla risonanza la fase sia nulla, inoltre, al crescere della frequenza, nel sistema elettrico cresce la componente induttiva (intuitivo nel duale meccanico, dove l'inerzia della massa ostacola le variazioni rapide) e si riduce quella capacitiva.

Altra particolarità è che a frequenza nulla, cioè in condizioni stazionarie, l'impedenza capacitiva è infinita mentre quella induttiva è nulla.

Se rappresentiamo il modulo dell'impedenza su un grafico con le frequenze in ascisse, otterremo una curva che diverge a infinito per f=0 e f=∞ e che alla frequenza di risonanza ha un minimo pari alla resistenza R.

Come casi particolari osserviamo che se L o M_M sono nulli, al crescere della frequenza l'impedenza Z decresce fino al valore minimo R, quindi l'effetto cresce rispetto alla causa e risulta in fase: tale comportamento è definito **passa-alto**.

Viceversa, se la capacità C_E è infinita (che corrisponde ad un corto circuito) o è infinita la cedevolezza C_M (che corrisponde all'assenza di alcun richiamo elastico) l'impedenza Z ha il minimo, sempre pari a R, a frequenza f=0, dove l'effetto sarà massimo rispetto alla causa e in fase: è il comportamento **passa-basso**.

Beh, come prima somministrazione di questa “elettroacustica in pillole” penso che sia stata una dose da cavallo ma ho ritento inopportuno spezzare la continuità del ragionamento, partito dal concetto intuitivo d’impedenza per arrivare all’espressione dell’impedenza complessa.
Prometto che in seguito ridurrò le “pillole” a dimensioni più digeribili.

Finalmente possiamo riassumere molti dei concetti esposti, in una tabella di corrispondenza tra fenomeni elettrici e meccanici:

Dualismo	Causa	Effetto	Potenza	Resistenza	Inerzia	Cedevolezza
Elettrico	V	i	P_E	R_E	L	C_E
Meccanico	F	v	P_M	R_M	M_M	C_M

È solo l’inizio per un percorso che porta a poter vedere e simulare un altoparlante, col relativo carico acustico, nel comportamento elettrico, meccanico e acustico, come una rete elettrica di resistenze, induttori e condensatori.
Il comportamento elettrico individuerà la curva d’impedenza, in modulo e fase.
Il comportamento meccanico potrà indicarci l’escursione della membrana.
Il comportamento acustico si rifletterà nella risposta in frequenza, almeno nella zona di validità del modello.

Prossimamente:

2. Serie e parallelo di impedenze. Estensione della dualità all’idraulica e all’acustica.

SIMBOLI ED ABBREVIAZIONI

a	accelerazione [m/s^2];
C_E	capacità elettrica [F];
C_M	cedevolezza meccanica [m/N];
f	variabile frequenza [Hz];
F	forza meccanica [N];
i	corrente [A];
j	unità immaginaria = $\sqrt{-1}$;
L	induttanza [H];
M_M	massa meccanica [kg];
P_E	potenza elettrica [W];
P_M	potenza meccanica [W];
R_E	resistenza elettrica [ohm];
R_M	resistenza meccanica [kg/s];
v	velocità lineare [m/s];
V	tensione elettrica [volt];
X_E	reattanza elettrica [ohm];
X_M	reattanza meccanica [kg/s];
Y	ammettenza = 1/Z;
Z_E	impedenza elettrica [ohm];
Z_M	impedenza meccanica [kg/s];